

Ярослав Шрамко

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ РЕФЛЕКСИИ О ЛОГИЧЕСКОМ СЛЕДОВАНИИ ПЕРВОГО И БОЛЕЕ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

Люди не только механически выполняют предписанные им нормы поведения, но и осмысливают их, рефлексиируют, интерпретируют, систематизируют, спорят о способах их применения. Эти задачи решаются в рамках познавательных процессов, в рамках культуры интеллектуальных рефлексий, образных и символических интерпретаций, “правил игры” человеческого бытия. Культура интеллектуальных рефлексий как своего рода базисная ценность, формируется в значительной мере развитой способностью человека “разглядеть” проблемное поле

Криворізький державний педагогічний університет

смыслов и форм его существования, способностью выявить в обозреваемом конгломерате событий определенные закономерности, системность и т.п., иначе говоря, способностью организовывать, упорядочивать свои представления об окружающей действительности в соответствии с логикой ее существования и развития, представленной, однако, в форме субъективной идентичности.

Преподавание логики традиционно занимает важное место в системе высшего педагогического образования. Формирование навыков логически правильного рассуждения является существенным при подготовке квалифицированных педагогических кадров. Как известно, одним из центральных логических отношений являются отношение логического следования. В соответствии с утверждением С. К. Клини, логика "говорит нам, что из чего следует" [15, 11]. Однако классическое отношение логического следования парадоксально в том смысле, что в соответствии с этим отношением, из противоречия следует любое высказывание, а общезначимое высказывание логически следует из произвольных утверждений. Иными словами, отношение логического следования в классической логике нерелевантно.

А. Андерсон и Н. Белнап [5, § 15.2] предложили аксиоматическую систему E_{fde} , являющуюся фрагментом релевантной системы E (of entailment) и претендующую на то, чтобы служить адекватной формализацией всех валидных утверждений о следовании первого порядка. Все теоремы исчисления E_{fde} являются импликациями первого порядка, то есть, формулами вида $A \rightarrow B$, где как A , так и B не содержат связки \rightarrow .

Было замечено, что системы, имеющие дело со следованием только первого порядка, допускают хорошее семантическое обоснование, являющееся, к тому же, по мнению многих исследователей, довольно естественным с содержательной точки зрения. На основе такого содержательного рассмотрения, некоторыми авторами были предложены строгие семантики для системы E_{fde} . Здесь можно сослаться на "интуитивную" семантику Д.М. Данна [6], теорию Белнапа о том, "как нужно рассуждать

компьютеру” [1], [2] и семантику Е. К. Войшвилло, построенную на основе обобщенной теории семантической информации Карнапа и Бар-Хиллела [3]. Все эти семантики являются семантиками построенными по т. н. “Американскому плану” [8].

Охарактеризуем кратко наиболее важные формальные аспекты построения такого рода семантик. Представим семантическую модель для классической логики как тройку $\langle W, T, F \rangle$. Здесь W есть множество всех “возможных миров” (точек соотнесения), между которыми не предполагается наличия никакого отношения “достижимости” (Вопрос конкретизации того, что представляют собой элементы из W остается каждый раз на усмотрение того или иного исследователя. Так, например, это могут быть Карнаповские описания состояний. Этот подход последовательно реализован, в частности, в [3]. Описания состояния определяются там как особого рода множества, а не конъюнктивные предложения.) T и F – классические истинностные значения “истина” и “ложь”. При этом взаимоотношения между данными значениями регулируются обычным образом при помощи следующих условий (для всякого “возможного мира” $a \in W$ и для всякой пропозициональной переменной языка):

$$(a) |p_i|^a = T \text{ или } |p_i|^a = F;$$

$$(b) |p_i|^a \neq T \text{ или } |p_i|^a \neq F.$$

(Выражение $|A|^a = T$ следует понимать как “высказывание A истинно в возможном мире a ”, а выражение $|A|^a = F$ – как “высказывание A ложно в возможном мире a ”)

Условия истинности и ложности пропозициональных связок задаются посредством стандартных для классической логики определений. Чтобы получить теперь семантику для $E_{\text{да}}$, нужно отказаться от условий (a) и (b) и допустить существование таких “миров”, в которых высказывания могут быть одновременно истинными и ложными, а также ни истинными, ни ложными. В семантике [3] это происходит за счет перехода к понятию обобщенного описания состояния. Обобщенное описание состояния есть просто произвольное подмножество множества $\{p_1, \sim p_1, p_2, \sim p_2, \dots, p_n, \sim p_n\}$. Такого рода миры характеризуются

некоторыми авторами как “невозможные возможные миры”. Результатом, однако, будет семантика, в которой парадоксы следования не являются валидными! То есть, отношение следования, определенное в рамках данной семантики, является непарадоксальным и релевантным в том смысле, в каком этот термин употребляется в релевантной логике. Посредством системы E_{fd} как раз и осуществляется аксиоматизация полученного непарадоксального отношения следования.

Описанная стратегия преодоления парадоксов следования получила широкое распространение в литературе. С чисто технической точки зрения она является безупречной и не вызывает никаких вопросов. Определенного рода трудности возникают при попытке дать содержательно-философское обоснование правомерности допущения “невозможных возможных миров”. Многие исследователи приложили немало усилий, направленных на то, чтобы оправдать введение в семантику миров, где может иметь место как $|p_i|^a = T$ и $|p_i|^a = F$, так и $|p_i|^a \neq T$ и $|p_i|^a \neq F$ (см. упоминавшиеся выше работы). Так, аргументация Н. Белнапа в [1], [2] строится на необходимости применения в компьютерах такой логики, которая сохраняла бы работоспособность компьютера даже когда он имеет дело с противоречивыми и неполными данными. В [3] подчеркивается “контрфактический характер” отказа от предпосылок (a) и (b).

Тем не менее, многим авторам эта аргументация не кажется убедительной. Часто можно встретить мнение об “искусственности” (или даже “экстравагантности”) допущения неполных и противоречивых миров. Особенно большая полемика развернулась вокруг противоречивых миров. Однако, как отмечено в [3, 33], противоречивые миры по существу (неявно) допускаются и в рассуждениях в рамках классической логики, когда в качестве посылок в выводе принимают противоречивую формулу.

“Очевидно, что принятие некоторого утверждения в качестве посылки рассуждения означает именно допущение того, что она истинна” [3, 33].

Е. Сидоренко [11] осуществил интересный содержательный анализ общеизвестного классического вывода “из противоречия следует все, что угодно”. Речь идет о выводе:

1. $A \ \& \ \sim A$ (посылка)
2. A (из 1 исключение $\&$)
3. $\sim A$ (из 1 исключение $\&$)
4. $A \vee B$ (из 2 введение \vee)
5. B (из 3, 4 дизъюнктивный силлогизм (исключение \vee))

Как отмечает Сидоренко, применяя на пятом шаге правило дизъюнктивного силлогизма неявным образом исходят из того, что из двух имплицитно содержащихся в его посылках возможных случаев $\sim A$ и A , или $\sim A$ и B (так как $\sim A \ \& \ (A \vee B)$ классически эквивалентно $(\sim A \ \& \ A) \vee (\sim A \ \& \ B)$), первый невозможен в силу принципа непротиворечия. Но здесь имеет место явная непоследовательность в рассуждениях, ибо принимая $\sim A \ \& \ A$ за истину, одновременно считают, что это невозможно. Эта непоследовательность, очевидно, нуждается в исправлении. С этой целью релевантная логика предлагает признать возможность (хотя бы чисто абстрактную) истинности $\sim A \ \& \ A$ и, соответственно, допустить существование “миров”, где эта возможность реализовалась бы. Но в качестве побочного результата приходится отказываться от правила дизъюнктивного силлогизма, что многими рассматривается как серьезный недостаток.

Возможен, однако, и другой путь преодоления указанной непоследовательности. Этот путь заключается в последовательном проведении принципа непротиворечия и запрещении использовать в качестве посылок вывода противоречивых формул. В этом случае правило дизъюнктивного силлогизма сохраняется. Такая стратегия реализована в системе строгого логического следования Х. Весселя [14]. Недостаток этого подхода, однако, может быть усмотрен в том, что мы лишаемся возможности применять такой широко распространенный способ рассуждения, как “доказательство от противного” (или “приведение к абсурду”).

В [13] предлагается система натурального вывода, которая претендует на то, что в ней сохраняются достоинства обеих вышеописанных подходов и одновременно устраняются их недостатки. В этой системе сохраняется правило дизъюнктивного силлогизма и разрешается использовать в качестве посылок противоречивые формулы. Основной особенностью данной системы является требование нормализации выводов, которое заключается в запрете применять к какой-либо формуле правило исключения логической связки, если эта формула была перед этим получена по правилу введения этой связки. Интересным является то обстоятельство, что результатом является интуиционистская релевантная система, которую Теннант обозначает как IR. Тем не менее данная система имеет свое слабое место – формализованное в ней отношение следования не является транзитивным.

Конечно, обсуждение различных имеющихся в литературе стратегий преодоления парадоксов следования можно было бы продолжать долго, ибо литература по этому вопросу чрезвычайно обширна. Это справедливо также для “американского плана” и системы E_{fdc} . И хотя имеется немало авторов, подвергающих этот план серьезной критике, все же можно утверждать, что система E_{fdc} занимает прочное место в ряду логических исчислений и является хорошо изученной с различных точек зрения.

Представляется, однако, важным подчеркнуть, что связки $\&$, \vee , \sim , которые входят в формулы A и B, являются классическими связками. То есть, если система E_{fdc} действительно что-либо формализует, так это отношение релевантного логического следования между формулами классической логики. Кроме того, можно предположить, что описанные выше трудности, связанные с осуществлением американского плана, специфичны именно для классической логики и что применение данной стратегии для анализа следования в других логиках (например, интуиционистской) не обязательно влечет за собой подобного рода проблемы.

В работах [4], [9], [10] была предложена теория первопорядкового релевантного следования для формул интуиционистской логики высказываний. На основе

разработанной там семантики интуиционистских описаний состояний для исчисления высказываний Гейтинга (I) было выработано интуитивное семантическое понятие релевантного логического следования для интуиционистских формул и предложена аксиоматическая система, формализующая это понятие. Кроме того, аналогичное понятие сформулировано на основе модифицированной семантики А. Гжегорчика. Осуществленный в этих работах анализ можно охарактеризовать как применение стратегии “американского плана” к исследованию интуиционистского отношения следования. Было показано, что определенные методологические принципы, на которые опирается интуиционистская логика, позволяют утверждать, что разработанное понятие релевантного следования действительно имеет надежный интуитивный и философский базис и что применение “американской” стратегии вовсе не нуждается здесь в каком-то дополнительном обосновании (или оправдании), поскольку представляет собой последовательное проведение данных методологических принципов.

Тем самым было сформулировано понятие релевантного логического следования для интуиционистских формул **первого порядка** и предложена аксиоматическая система, формализующая это понятие.

Значительный интерес представляет также проблема правомерности допущения следования более высокого чем первый порядок. Эта правомерность некоторыми авторами ставится под сомнение. При этом выдвигается примерно следующая аргументация. Следование представляет собой не логическую связку, а метаязыковое отношение между высказываниями. На синтаксическом уровне это отношение может быть представлено посредством особого метаязыкового оператора (не являющегося элементом объектного языка), например – ‘ \vdash ’. Областью действия данного оператора являются **объектные высказывания**. Поэтому выражения, в которых допускается итерация следования (например $(A \vdash B) \vdash (C \vdash D)$), являются просто синтаксически неправильно построенными выражениями. Более того, в [12] утверждения о логическом следовании $(A \vdash B)$ последовательно

тракуются как элементарные высказывания, где “оператор следования” - ‘ \vdash ’ интерпретируется не как оператор, а как **двуместный предикат**, а A и B – как особые термины – “высказывание A ” и “высказывание B ” соответственно. Там подчеркивается:

“Было бы неправильно рассматривать высказывания о логическом следовании одного высказывания из других как составные высказывания. В $A \vdash B$ говорится не об объектах, к которым относятся A и B , но о взаимосвязи высказываний A и B как особых объектов. Составные высказывания, образованные из A и B , относятся к той же самой предметной области, что и высказывания A и B . Высказывание $A \vdash B$, напротив, никак не относится к предметной области, к которой относятся A и B . Предметную область, к которой относится это высказывание, образуют, скорее, сами A и B как объекты особого рода” [12, 210].

В принципе, данная аргументация является вполне обоснованной. Тем не менее, представляется, что такого рода доводы вовсе не исключают возможности и правомерности рассмотрения утверждений о следовании более высокого, чем первый, порядка, то есть, высказываний о наличии или отсутствии отношения следования между высказываниями о следовании. В конце - концов, имеем же мы возможность оперировать с предикатами не только первого, но и второго, третьего и т. д. порядков! И если верным является замечание о различии предметных областей для высказываний о следовании и высказываний входящих в состав высказываний о следовании, то это различие должно просто найти определенное отражение при формулировке соответствующих семантических определений. Кроме того, в рамках обычных логических исчислений натурального вывода мы **фактически** уже имеем дело со следованием как минимум **второго** порядка (даже если не интерпретировать все вхождения импликации как репрезентирующие отношение следования). Ведь именно такое следование представляют так называемые **непрямые** правила вывода, в рамках которых осуществляется переход от одних выводимостей (утверждений о следовании) к другим

выводимостям. Рассмотрим, например, хорошо известное правило “введения отрицания”. Неформально оно может быть сформулировано следующим образом:

Если из некоторого множества посылок Γ и высказывания A мы вывели определенное высказывание B и его отрицание, то тогда можем заключить, что имеется выводимость из множества посылок Γ высказывания $\sim A$

Формально

$$\Gamma, A \vdash B; \Gamma, A \vdash \sim B \Rightarrow \Gamma \vdash \sim A.$$

Здесь знак, ‘ \Rightarrow ’ представляет не что иное, как отношение следования второго порядка и все его отличие от ‘ \vdash ’ заключается лишь в том, что он интерпретируется на высказываниях о следовании в то время как последний на высказываниях не о следовании. Но это, тем не менее, есть все то же отношение следования как отношение между высказываниями. О чем утверждается в самих высказываниях, не играет здесь никакой роли, и было бы неправильным считать, что следование второго порядка принципиально отличается от следования первого порядка только на основании различий в областях интерпретации. Ведь, если в высказываниях A и B говорится о математике, а в высказываниях C и D – о литературе, то это не может служить основанием для утверждения, что следование между A и B есть какое-то “другое” следование, чем следование между C и D . Логические законы не зависят от области интерпретации.

К тому же, даже системы логического следования первого порядка (например, $E_{\text{де}}$) представляют в действительности следование не только первого, но и второго порядка, ибо правила вывода таких систем есть не что иное как утверждения о следовании одних высказываний о следовании из других. Но стоит лишь допустить правомерность следования второго порядка, как, тем самым, сразу же снимается вопрос о следовании третьего, четвертого и так далее порядков, в силу, например, результата Р. Мейера [7], который показал, что следования второго порядка

достаточно для представления любых утверждений о следовании, поскольку всякая формула о следовании более чем второго порядка может быть преобразована в некоторую эквивалентную ей формулу не более чем второго порядка.

Что, однако, все еще может быть оспорено, так это целесообразность построения систем следования более высокого чем первый порядок (ведь в рамках этих систем все равно находит свое выражение также и следование второго порядка, а большего нам и не нужно!). Иными словами, все принципы дедукции могут быть адекватно выражены посредством построения систем только первого порядка, а системы высших порядков просто представляют соответствующие правила вывода в виде формул. Так, например, упоминавшееся выше правило "введения отрицания" может быть также представлено в виде соответствующей формулы: $((A \rightarrow B) \& (A \rightarrow \sim B)) \rightarrow \sim A$. Тем не менее, представляется, что анализ отношения следования посредством формулировки систем следования высших порядков имеет определенные теоретико - методологические преимущества и располагает многочисленными как техническими, так и содержательными средствами, позволяющими рельефнее прояснить многие важные особенности этого отношения.

В работах [4], [9], [10] такого рода анализ был распространен на отношение следования интуиционистской логики путем построения систем, посредством которых формально эксплицируется релевантное логическое следование для формул языка, получающегося из пропозиционального интуиционистского языка, посредством замены интуиционистской импликации „ \supset “ на интенциональную импликацию „ \rightarrow “. Было предложено несколько релевантных интуиционистских исчислений, являющихся системами типа E. Иными словами, построены релевантные конструктивные системы, являющиеся в определенном смысле аналогичными классической релевантной системе E, которая, в соответствии с точкой зрения представленной в [5] и [3], выделяется из существующих неконструктивных систем релевантной логики как формализация (хотя, быть может, и неполная) релевантного логического следования и релевантной

условной связи для формул языка, являющегося расширением языка классической пропозициональной логики.

Литература

1. Белнап Н. Об одной полезной четырехзначной логике // Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. – Москва, 1981.
2. Белнап Н. Как нужно рассуждать компьютеру // Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. – Москва, 1981.
3. Войшвилло Е. К. Философско-методологические аспекты релевантной логики. – Москва, 1988.
4. Шрамко Я. В. Логическое следование и интуиционизм. – Киев, 1997.
5. Anderson, A. R. and Belnap, Nuel D. Jr. Entailment. The Logic of Relevance and Necessity. vol. I, Princeton (Princeton University Press), 1975.
6. Dunn, J. M. Intuitive Semantics for First-Degree Entailment and 'Coupled Trees' // *Philosophical Studies*, 29, 1976.
7. Meyer, R. K. Career Induction Stops Here (and here = 2) // *Journal of Philosophical Logic*, 8, 1979.
8. Meyer, R. K. and Martin, E. Logic on the Australian Plan // *Journal of Philosophical Logic*, 15, 1986.
9. Shramko, Y. V. Relevant variants of intuitionistic logic // *Bulletin of IGPL*, 2, 1994.
10. Shramko, Y. *Intuitionismus und Relevanz*, Logos-Verlag, Berlin, 1999.
11. Sidorenko, E. A. The Law of Contradiction and Paradoxes of Inference // *Bulletin of the Section of Logic*, 17, 1988.
12. Sinowjew, A., Wessel, H. *Logische Sprachregeln*. Berlin (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften), 1975.
13. Tennant, N. Natural Deduction and Sequent Calculus for Intuitionistic Relevant Logic // *Journal of Symbolic Logic*, 52, 1987.
14. Wessel, H. *Logik*. Berlin (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften), 1984.
15. Клини, С. К. *Математическая логика*, Москва: Мир, 1973.